

Construcció del Fractal “Triangle de Sierpinski” i moltes figures triangularitzades amb més d’un miler de llaunes de refresc

El passat desembre, els alumnes de 4t d’ESO de l’INS Torredembarra van celebrar, d’una manera molt especial, les festes nadalenques que s’apropaven.

Dins de la matèria de matemàtiques, i amb la Mònica Orpí com a professora, van construir amb llaunes de refresc, el 7 primers termes de la successió de potències de 3. A continuació trobareu el nombre de llaunes que representava cadascun dels termes d’aquesta progressió geomètrica de raó 3 :

$$a_1 = 3^0 = 1 \text{ llaunes}$$

$$a_2 = 3^1 = 3 \text{ llaunes}$$

$$a_3 = 3^2 = 9 \text{ llaunes}$$

$$a_4 = 3^3 = 27 \text{ llaunes}$$

$$a_5 = 3^4 = 81 \text{ llaunes}$$

$$a_6 = 3^5 = 243 \text{ llaunes}$$

$$a_7 = 3^6 = 729 \text{ llaunes}$$

Però el repte no només consistia a col·locar en ordre una sèrie de llaunes per tal de construir aquesta successió numèrica, sinó que el nostre objectiu anava encara més enllà: volíem obtenir els primers moments de la construcció infinita del fractal anomenat Triangle de Sierpinski.

Però segurament us estareu preguntant “De què m’estan parlant ara? Què és un fractal?”. En aquest article no tenim la intenció que us espanteu amb conceptes ni tecnicismes estranys i molt menys pretenem que feu càlculs laboriosos, però sí que creiem que valdrà la pena acabar de llegir aquest escrit. Com us anàvem dient, varem construir amb llaunes de refresc un fractal. Tots els fractals tenen una propietat en comú: són el resultat de la iteració d’un procés geomètric elemental, que dóna lloc a una estructura final d’una complicació, aparentment, extraordinària. Posseeixen la propietat que cada petita porció del fractal pot ser visualitzada com una rèplica del tot, denominada auto semblança. L’altra característica, la qual fou decisiva per anomenar-los fractals, és que la seva dimensió és fraccionària. No tenen dimensió 1, 2 o 3 com la majoria dels objectes als quals estem acostumats. Es defineix dimensió fractal i , a més a més, és una generalització de la dimensió euclidiana, com $D = \frac{\log s}{\log r}$, on s és el número de còpies o parts auto semblants i r és la raó de semblança.

Ufff, però què representa tota aquesta explicació? Podríem fer una síntesi i dir que els fractals són unes estructures que tenen una dimensió pròpia, que no és un nombre natural, sinó un nombre decimal, molt diferent a la que coneixem nosaltres. També podem afegir que són figures geomètriques que per molt que es parteixin, conserven la mateixa estructura i la seva forma no canvia.

Però nosaltres no hem fet qualsevol fractal! Com ja hem mencionat abans, el nostre s'anomena Triangle de Sierpinski i és la forma que tenen la majoria de les antenes dels nostres mòbils per tal d'agafar quasi totes les longituds d'ona diferents i tenir, així la màxima de les cobertures. De fet, la marca d'aquestes antenes s'anomena *Fractus*.

Malgrat tot, els fractals en general, existeixen només en un estat infinit. En la nostra pràctica, hem intentat conformar-nos en visualitzar-lo en alguna etapa finita del seu desenvolupament perquè poguéssiu ser testimonis d'aquesta aventura que hem emprès i que ara estem compartint amb vosaltres. Per a la seva construcció, hem utilitzat un total de **1093** llaunes de refresc. Sembla mentida però si sumem totes les llaunes que hem vist abans amb les potències de 3 obtenim aquest increïble nombre: $1+3+9+27+81+243+729=1093$.



Si us fixeu en la fotografia podreu observar que, en cada pas, el triangle de Sierpinski està format per tres còpies autosemblants del pas anterior ($s=3$) i que 2 és el factor d'escala entre els costats

del triangle en una etapa i la següent ($r=2$). De la definició de la dimensió resulta que $D = \log 3 / \log 2 = 1.585$. (Nota: podreu trobar la tecla log en les vostres calculadores científiques. Aquesta paraula significa logaritme i és molt útil com veureu en etapes superiors de matemàtiques)

Hem rebut molta informació de cop i potser ja esteu cansats però només us demanem que llegiu una miqueta més ja que el nostre viatge per les matemàtiques no acaba aquí. Aprofitant tota la feina feta, començant per la recopilació de les llaunes i totes les estructures triangulars formades amb 27 llaunes lligades, que en vam fer més d'una trentena, que ja les havíem fet servir per a la construcció de la successió de potències de 3 i pel fractal de Sierpinski, vàrem construir diferents figures formades per aquests mòduls triangulars. Aquesta va ser la part més creativa del procés com podreu veure en el vídeo que vàrem gravar. Va ser una jornada molt divertida i vam fer, amb molta imaginació, tota una sèrie de combinacions artístiques, i també matemàtiques, que van donar lloc a construccions geomètriques increïbles com ara: la Torre Eiffel, una figura humana, un ninot de neu, més de 10 estrelles diferents, dos arbres de Nadal, un floquet de neu i moltes altres figures que simbolitzaven l'etapa nadalenca que estava a punt d'estrenar en aquell moment i podreu observar en la gravació.

Totes les superfícies es poden dividir en una estructura formada únicament per triangles. La partició d'una figura plana mitjançant aquests polígons de 3 costats s'anomena triangulació. En geometria, la triangulació d'un polígon és una divisió de la seva superfície en un conjunt de triangles que, necessàriament, han d'acomplir les següents condicions:

- En primer lloc podem remarcar que la unió de tots ells ha de ser igual al polígon original.
- Seguidament, és molt important saber que els vèrtexs dels triangles són els del polígon original.
- Finalment, qualsevol parella de triangles comparteix, únicament, un vèrtex o un costat.

Però ja n'hi ha prou de definicions i explicacions matemàtiques per avui! Després de tota la teoria que heu llegit, ara podreu quedar-vos sense paraules quan vegeu el vídeo dels resultats obtinguts.

I, com heu pogut llegir i sobretot si heu pogut visualitzar el vídeo, haurem pogut comprovar que es poden tenir experiències fascinants amb les mates i que aquí teniu un exemple més que demostra clarament que les matemàtiques, segons com s'enfoquen, poden resultar molt divertides.

Per nosaltres poder desitjar-vos un molt bon Nadal i un final d'any 2015 d'aquesta manera tant especial, ens ha omplert de goig perquè ho hem fet amb alegria i molta il·lusió; malgrat el munt de feina que hi ha darrera, ha valgut moltíssim la pena l'experiència i també tenir l'oportunitat de compartir-la ara amb tots vosaltres.